

Razvoj pojma množenja u početnoj nastavi matematike

1. Uvodna razmatranja

Od svojih početaka do danas, nastava matematike se stalno menjala u zavisnosti od ciljeva obrazovanja, društvenih potreba i naučnih saznanja vremena u kojem se kao predmet izučavala. Posljednjih decenija savremena nastava matematike se snažno razvija pod uticajem naučnih saznanja do kojih su došle pedagogija, didaktika, psihologija i druge naučne discipline. U osnovi nastave ovog predmeta leži sticanje matematičkih znanja i intelektualni razvoj učenika. Ovom konstatacijom nikako ne želimo umanjiti značaj socijalne, fizičke i emocionalne komponente za razvoj ličnosti učenika već samo istaći značajnu ulogu matematičkih sadržaja u formiranju i razvoju logičko-matematičkog mišljenja. Realizujući nastavu matematike ostvarujemo i jedan od bitnih ciljeva obrazovanja: sticanje znanja, umjenja i navika. S toga je veoma važno poznavati puteve saznavanja i izgrađivanja matematičkih pojmova koji kasnije bivaju ugrađeni u opšti sistem matematičkog znanja.

Matematički pojmovi se kao i oni spontani formiraju postepeno. Najpre se utisci sređuju oko srodnih objekata dok se u umu osobe koja uči ne formira predstava ili mentalna slika tog pojma. Zatim sledi naziv i na kraju simbol za određeni pojam. No u matematici su pojmovi ne samo apstraktniji od onih u svakodnevnom životu nego i put učenja s godinama postaje sve apstraktniji. Reč apstrahovanje u formiranju matematičkih pojmova sugerise izdvajanje bitnih, invarijantnih svojstava i paralelno zanemarivanje nebitnih svojstava. Uopšteno možemo reći da je "pojam P manjeg stepena apstraktnosti od pojma Q, ako je svaki primer P1 za pojam P takođe primer i za Q." To praktično znači da kada je jedan pojam apstraktniji od drugog, taj drugi pojam nam služi kao primer za prvi.

Tako brojevi, jedan, dva, tri ... predstavljaju primere za pojam " prirodni broj ", kao što maslačak, ljubičica i visibaba predstavljaju primer za pojam cvet. Očigledno je da učenici ne mogu usvojiti apstraktnije pojmove ako nisu već usvojili pojmove nižeg stepena apstraktnosti. Imajući u vidu da se pojmovi na nižem školskom uzrastu ne mogu formirati putem definicija jer bi tako otišli u formalizam, već uvek putem dobro odabranih primera, to proces osmišljavanja i didaktičkog oblikovanja programskih sadržaja podrazumeva nešto dublju analizu.

2. Saznajne osnove formiranja pojma množenje

Veliki doprinos proučavanju intelektualnog razvoja učenika i procesa formiranja pojmova u nastavi dali su istaknuti predstavnici moskovske škole Lav Semjonovič Vigotski (L.S. Vigotskij, 1896-1934) , američki psiholog Dž Bruner (Jerome Bruner) , švajcarski psiholog Žan Pijaže (Piaget Jean, 1896-1980), Hans Ebli (H. Aebly) i dr. Za nastavu matematike veoma je značajno saznanje Pijažea o principijelnom sledu određenih stadijuma u razvoju mišljenja učenika. Istaknuti psiholog naglašava da razvoj mišljenje svakog čoveka prolazi kroz nekoliko stadijuma :

- ◆ ***Senzomotorni period*** (0-2 godine)
- ◆ ***Predoperativni period*** (od 2-7 godine u kojem je mišljenje dece zasnovano na konkretnim delatnostima i neposrednom opažanju)
- ◆ ***Stadijum konkretnih operacija*** (od 7-11 godine u kojem je mišljenje povezano sa konkretnim predstavama zasnovanim na opažanju ili čulnom iskustvu učenika, kao i sposobnosti za kompoziciju i reverzibilnost)
- ◆ ***Stadijum formalno-logičkih operacija*** (od 11-15) godine koji se odlikuje razvojem sposobnosti učenika da deduktivno zaključuju bez oslanjanja na predstave i opažanje) .

Iako su uzrasti učenika na kojima se izvesne strukture u mišljenju pojavljaju (prema Pijažeu) kasnijim istraživanjima relativizovani, nesumnjivo je da je sled pomenutih stadijuma u razvoju mišljenja konstantan i značajno utiče na

oblikovanje matematikih sadržaja koji se u nastavi izučavaju. Iz Pijažeeve periodizacije razvoja mišljenja kao značajan zaključak za nastavu matematike možemo izvesti da u početnim razredima osnovne škole treba voditi računa o tome da učenje bude zasnovano na konkretnom iskustvu učenika te da preuranjena verbalna oblikovanja sadržaja treba izbegavati. Kako se učenici u početnim razredima osnovne škole nalaze u stadijumu konkretnih operacija to u nastavi mora dominirati učenje putem indukcije kroz raznovrsne i očigledne primere. Tokom ranog uzrasta učenike treba postupno voditi ka hipotetičko-deduktivnom zaključivanju koje će uslediti u starijim razredima osnovne škole.

Dok je prelazak sa jednog stadijuma na drugi Pijaže objašnjavao procesima biološkog zrenja učenika, Vigotski, Bruner i Ebli su zastupali stav da razvoj mišljenja nije nužno određen zrelošću, već uslovima i vaspitno obrazovnim delovanjima. Danas zasigurno znamo da su intelektualne sposobnosti i mišljenje učenika ne samo pretpostavke za efikasno izvođenje nastave matematike već i njen produkt, te se pri oblikovanju sadržaja o tome mora voditi računa. Prema učenju Vigotskog zahtevi koji se učenicima postavljaju u nastavi moraju se nalaziti u "**zoni narednog razvoja**", odnosno, moraju biti takvi da iziskuju izvesni misaoni napor učenika prilikom rešavanja jer u protivnom neće biti napredovanja u razvoju mišljenja.

Za nastavu matematike je dalje bitno razlikovati **svakodnevne** od onih **naučnih** pojmova. Pojmove koje dete formira u toku praktične delatnosti i neposrednog dodira sa okolinom proističu iz neposrednog iskustava i smatramo ih **spontanim** ili nenaučnim pojmovima. Da bi se ovladalo naučnim pojmovima kakav je recimo "'broj tri" ili "'kvadrat" u matematici, nije dovoljno samo čulno iskustvo i prosto opažanje već misaona aktivnost učenika u procesu učenja. U procesu sticanja matematičkog pojma, koji je veoma složen i često dugotrajan proces, učenike je potrebno upoznati sa nizom činjenica i tipičnih primera koje će oni dovoditi u međusobne odnose, upoređivati i utvrđivati bitne odlike svih ponuđenih reprezentata. Proces izdvajanja invarijantnih ili bitnih svojstava koje imaju svi objekti neke izdvojene klase nazivamo **apstrahovanjem**. Dakle, do matematičkih pojmova ne može se doći samo putem opažanja i čulnog iskustva

već putem apstrahovanja koje nesumnjivo ima svoje korene u čulnom saznanju. Pod uticajem čulnih iskustava izgrađuju se percepcije koje ostaju u pamćenju kao predstave ili slike sećanja i koje se nadalje putem mišljenja izgrađuju u pojmove, sudove, zaključke kao integralne delove matematičkih znanja. Proces prevođenja konkretnih na misaone operacije Pijaže naziva **interiorizacijom** pojma. Za uspešnu izgradnju nekog pojma ili operacije neophodna je izvesna pokretljivost u mišljenju tj. sposobnost da se operacije na različite načine misaono spajaju i na misaonom planu okreću u suprotnm smeru, što Pijaže naziva sposobnošnju kompozicije odnosno reverzibilnošću mišljenja. U tom kontekstu možemo reći da je operacija množenja prirodnih brojeva postignuta onda kada je obuhvaćena sposobnost kompozicije (komutativnost, asocijativnost, i distributivnost u matematičkom smislu), njena reverzibilnost (mogućnost obrtanja kroz deljenje) i kada je učenici mogu primeniti. Za uspešnu "izgradnju neke matematičke operacije, pored interiorizacije (pounutrevanja) neophodna je i njena operativna obrada, smatra Ebli. Time on označava "varijabilno, smisljeno vežbanje koje u nastavi matematike služi produbljivanju razumevanja i čiji cilj još uvek nije nikakva automatizacija (Aebli, 1983, str. 238)

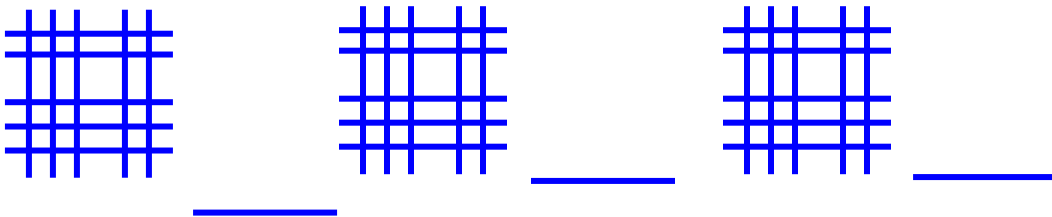
Po njegovom mišljenju pounutrevanje neke operacije sprovodi se kroz nekoliko stupnja:

- a) **konkretni stupanj** podrazumeva efektivno izvršavanje radnje na konkretnim materijalima ili predmetima
- b) na drugom **figuralnom** stupnju koristi se slikovno ili ikoničko predstavljanje predmeta koje je oslobođeno svih nebitnih elemenata (šuma)
- c) na trećem, **simboličkom** stupnju učenik koristi simbole

U slučaju problema množenja to bi značilo da učenicima treba predočiti situacije koje daju povod množenju, potom ih ikonički predstaviti i na samom početku uvođenja operacije insistirati isključivo na zapisivanju izraza i korišćenju simbola za predstavljanje operacije. Cilj je kako smatra Ebli, da se simboličkom prikazu da onaj značaj koji konkretni prikaz poseduje, odnosno najvažnije je da se

konkretna situacija poveže u jasne predstave. Akcenat se u tom slučaju ne stavlja na konačne rezultate i izračunavanje vrednosti izraza, već na simboličko predstavljanje situacija koje daju povod množenju. Na ovakav način, po mišljenju Eblija, operacija dobija izvesnu **pokretljivost** koja je neophodna za fleksibilnu primenu. Stvaranje pokretljivih operacija je suprotno stvaranju stereotipnih reakcija, dakle čvrstih asocijacija i automatizma kao relativno krutih i izolovanih vrsta ponašanja. Usvajanje tablice množenja u nastavi se vrlo često svodi na puko memorisanje rezultata, bez dubljeg razumevanja operacije množenja. Ebli predlaže da se tablica množenja izučava kroz sistem operacija (sabiranja, oduzimanja) i smatra da će učenici na taj način pre steći pokretljivost u računanju koja im omogućava da između više vrsta različitih puteva izaberu onaj povoljniji. Prilikom oblikovanja sadržaja učenicima se tako mogu ponuditi sledeći tipovi zadataka:

Pogledaj sliku pa izračunaj koliko ima štapića.



Mina radi: $3 \cdot 11 = 11 + 11 + 11 = 22 + 11 = 33$

dok Petar radi: $3 \cdot 10 + 3 = 30 + 3 = 33$

Koji način ti se više sviđa?



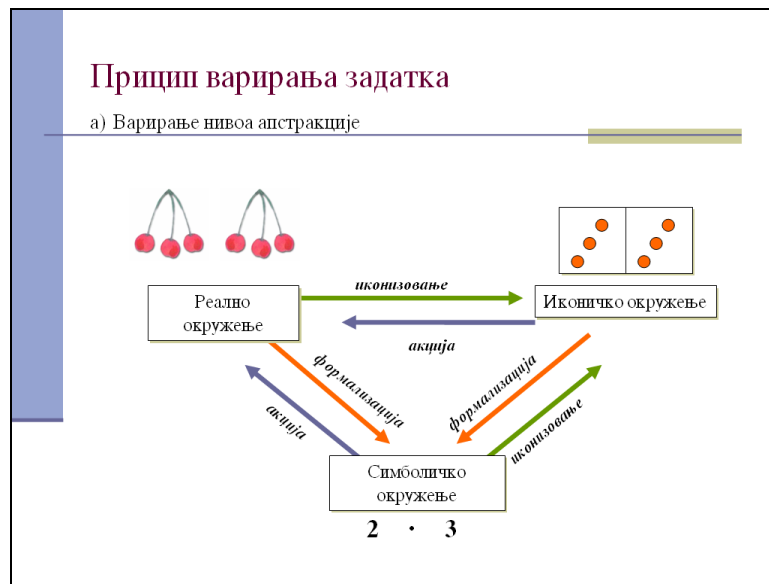
Kako se u nastavi matematike najčešće operiše konvencionalnim simbolima potrebno je još naglasiti da sam pojam ne treba poistovećivati sa njegovim primerima, simbolom, nazivom ili mentalnom predstavom o njemu. Koliko smo

skloni da pojmove identifikujemo sa njihovim nazivom ilustruje i primer sledećeg zadatka: Miša u jednoj korpi ima 6 jabuka a u drugoj 4 kruške. Ukoliko kruške nazovemo jabukama koliko će Miša tada imati jabuka. Ne razmišljajući previše mnogi bi rekli 10 jabuka što svakako nije tačno jer ukoliko krušku nazovemo jabukom to ne znači da će ona postati jabuka. Dakle Miša će i dalje imati 6 jabuka jer jabuku određuju njena bitna svojstva a ne samo njen naziv.

Matematički pojam je trokomponentan i sadrži: niz **primera** iz kojih se formira, **mentalnu predstavu** ili sliku koja se u memoriji nalazi, **naziv** i **simbol** kao njegovu jezičku kodifikaciju. Na primeru pojma "množenje" to bi značilo sledeće: primeri mogu biti raznovrsne situacije koje daju povod množenju kao npr: 2 automobila po četiri točka, 2 klupe u četiri reda itd.", prostornu kodifikaciju pojma činila bi pojednostavljena mentalna slika takvih situacija poput pravougaonih brojevnih slika, naziv pojma – "množenje" dok bi simbol za označavanje tog pojma bio npr. izraz " $2 \cdot 4$ " (na m mesta po n elemenata).

Bruner je proces razvoja mišljenja posmatrao kroz tri načina reprezentacije ili tri ravni misaonih predstava koje su veoma značajne za izučavanje matematičkih sadržaja. Prvi način predstavljanja po Bruneru jeste **enaktivni** i karakteriše ga shvatanje određenih odnosa na osnovu sopstvenih radnji. Drugi je **ikonički** učenicima omogućava shvatanje odnosa putem slika ili ikona. Poslednji način je **simbolički** i obuhvata shvatanje odnosa putem verbalnog saopštavanja ili sistema znakova. Tokom razvoja učenika dolazi do naglašavanja pojedinih ravni apstrakcije. Najpre, na predškolskom uzrastu, dominira akciono predstavljanje. Zatim, u periodu nižeg školskog uzrasta dominira ikoničko predstavljanje i kada dete možemo reći, najviše razmišlja u slikama. Na kraju kao najviša ravan apstrakcije dolazi simboličko predstavljanje. Sve prelaze u nastavi ka ravni radnje Bruner naziva "**akcijom**", prelaze ka ravni slika "**ikonizovanje**", ka jezičkoj ravni "**verbalizacija**", a one ka znakovnoj ravni "**formalizacija**". Obzirom da se u nastavi matematike operiše simbolima veoma je značajno kroz oblikovanje sadržaja obezbediti fine prelaze sa jedne na drugu ravan apstrakcije i to u svim smerovima. Kada je u pitanju modelovanje teme množenja to podrazumeva i kreiranje zadataka koji će učenicima omogućiti, pored zapisivanja izraza na

osnovu verbalnih podataka ili slika, sastavljanje tekstualnih zadataka na osnovu ponuđenih izraza (pr: *Sastavi zadatak za sledeći izraz: $(3 \cdot 5) \cdot 6$* , čime se zapravo krećemo u obrnutom smeru od **apstrakcije**, dakle u smeru **konkretizacije** pojma. Za ovu svrhu možemo koristiti i zadatke u kojima se od učenika zahteva da ponuđeni izraz predstave pomoću brojevnih slika. Posebno je značajno u nastavi matematike obezbediti dvosmerne prelaze ikoničkog i simboličkog predstavljanja. Ikoničko predstavljanje situacija koje daju povod množenju posebno je pogodno za simultano uočavanje različitih alternativa koje se u ravni radnje mogu izvoditi samo sekvencijalno, jedna za drugom. Ukoliko želimo učenicima ponuditi zadatke za usvajanje pravila množenja razlike brojem, možemo reći da je pogodnije ikonizovanje takvih situacija nego li izvođenje konkretnih radnji, obzirom da se akcijom može narušiti opažajna celina koja dovodi do razumevanja ovog pravila.



Za nastavu matematike je takođe svrsishodno u okviru simboličke ravni apstrakcije jasno napraviti razliku između jezičkih formulacija i predstavljanja matematičkim simbolima. Ukoliko simbolički želimo predstaviti množenje broja jedinicom (kao neutralnim elementom), zapisaćemo izraz $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$, ali bilo bi poželjno radi razumevanja takvo pravilo izraziti i u retoričkom obliku : *Kada je jedan činilac 1, proizvod i drugi činilac su jednaki*. Jezik u nastavi matematike ima nekoliko veoma važnih funkcija i tome treba posvetiti posebnu pažnju. Pored

imenovanja (dodeljivanja naziva) matematičkim pojmovima, jezik ima funkciju i definisanja sadržaja matematičkih pojmova. Verbalizacijom tako pojedina pravila u nastavi dobijaju jasnije i preciznije konture, bivaju lakša i jednostavnija za saopštavanje i upotrebu.

3. Empirijske osnove izučavanja teme množenje

U našim školama se izučavanje operacije množenja zasniva na strategiji razumevanja množenja kao zbira jednakih sabiraka. Međutim, iako je ova strategija u velikoj meri prihvaćena, postavlja se pitanje: sa koliko uspeha se ona danas primenjuje? Osim matematičke korektnosti, za uspeh ovog pristupa, pokazalo se neophodnim i uvažavanje specifičnosti dečijeg saznanja kao i osnovnih didaktičkih principa prilikom didaktičke transformacije sadržaja. U našoj zemlji do sada nisu vršena istraživanja koja bi potvrdila ili opovrgla potpunu korektnost strategije koja se primenjuje u obradi množenja. Sa druge strane nije verifikovan ni kvalitet učenika koji se primenjuje u najvećem broju slučajeva kao osnovno a neretko i kao jedino nastavno sredstvo u obradi pomenute teme. Rezultati istraživanja do kojih su došli timovi naučnika u Izraelu, Poljskoj, Nemačkoj (Silke 1999, Anghileri, 1998) i drugim zemljama, pokazuju da postojeća strategija često ne dovodi to potpunog ostvarenja postavljenih ciljeva. Ukratko rečeno, rezultati pokazuju da učenici ne razumeju množenje kao uniju jednakobrojnih skupova, da češće u postupcima računanja koriste prebrojavanje nego sabiranje, te da nisu u potpunosti osposobljeni za izvođenje množenja. Istraživači su tako došli do zaključka da učenici u najvećoj meri koriste ***računanje bez oslanjanje na usvojena pravila množenja***. Jasno je da prebrojavanje kao postupak računanja gubi smisao već kod operisanja sa većim brojevima i da ukoliko nema potpunog razumevanja operacije množenja sa svim njenim aritmetičkim svojstvima, ne može biti ni daljeg uspešnog napredovanja u izučavanju арифметичких sadržaja. Kada bi se poslužili nekom od taksonomija

zadataka mogli bi smo reći da *prebrojavanje* odgovara znanju prepoznavanja, *korišćenje tablice množenja* reproduktivnim znanjima, dok *korišćenje aritmetičkih svojstava* u postupcima računanja odgovaraju analizi, sintezi i primeni kao najvišim nivoima znanja. Za razliku od tradicionalne nastave, prepoznatljive po znanju i memorisanju činjenica, u savremenoj školi akcenat se stavlja razumevanje i utemeljivanje značenja.

Imajući u vidu značaj obrade množenja u početnoj nastavi matematike za razvoj matematičkih znanja učenika, njihovu elementarnu matematičku pismenost, razmatrajući rezultate do kojih su došli istraživači u svetu, te uzimajući u obzir svu suptilnost didaktičkog oblikovanja matematičkih sadržaja, opredelili smo se da jednim empirijskim istraživanjem ispitamo efikasnost postojeće strategije i osposobljenost učenika za izvođenje ove operacije.

Predmet istraživanja bio je uticaj aritmetičkih strategija na osposobljenost učenika za izvođenje operacije množenja i pravilno sprovođenje računskih procedura u rešavanju zadataka.

Polazeći od saznanjih osnova nastave matematike i puteva formiranja matematičkih pojmova, istraživanjem smo želeli ispitati uticaj nastave na izbor postupaka u rešavanju zadataka zasnovanih na strukturama množenja i to kroz poređenje sa spontanim načinima rešavanja problema učenika prvog razreda. Želeli smo dati odgovor na pitanje u kojoj meri današnja nastave utiče na formiranje i razumevanje množenja te koliko su učenici osposobljeni za uočavanje situacija zasnovanih na multiplikativnim strukturama. Kroz istraživanje smo dalje ispitivali osposobljenost učenika za primenu operacije množenja, računanja proizvoda kao zbira jednakih sabiraka i razumevanje aritmetičkih svojstava množenja. Kada kažemo *primenu* operacije množenja time želimo istaći razliku između znanja prepoznavanja, reproduktivnih znanja i znanja u znaku razumevanja. Vrlo često se dešava da znanja koja učenici steknu u nastavi matematike ne budu ispoljavana i u rešavanju problema iz svakodnevnog života. Učenici u većem broju slučajeva napamet nauče retorički izražena aritmetička pravila, uspeju da ih primene u programiranim zadacima u kojima se to od njih

zahteva ali najčešće ne shvataju njihov širi smisao u rešavanju praktičnih problema. Istraživanjem smo želeli odgovoriti i na pitanje kakva je osposobljenost učenika za izvođenje operacije množenja uzimajući u obzir prezentovani materijal i stepen složenosti zadataka.

Značaj istraživanja proizilazi pre svega iz značaja operacije množenja za elementarno matematičkog opismenjavanje učenika i naravno iz potrebe da učenici njome uspešno ovladaju. Obzirom da do sada u našoj zemlji nije vršeno kritičko preispitivanje postojeće strategije obrade množenja i sadržajne korektnosti učenika pomoću kojih se nastava ostvaruje, smatrali smo da će ovo istraživanje doprineti celovitijem sagledavanju problema izučavanje ove teme u početnoj nastavi matematike. Rezultati istraživanja, podržani teorijskom analizom ovog problema dali su nam kvalitetnu osnovu za ***kreiranje jednog celovitog modela*** za unapređenje nastave iz ove oblasti, čime je istaknut praktični značaj istraživanja..

Iz karaktera predmeta proizilazi i cilj našeg istraživanja.

Cilj istraživanja jeste da se kritički analizira primena aritmetičkih postupaka učenika u rešavanju zadataka zasnovanim na strukturama množenja i utvrdi povezanost sa postojećim strategijama nastave.

Glavna hipoteza istraživanja je: Učenici se prilikom rešavanja zadataka zasnovanim na strukturama množenja, radije opredeljuju za izračunavanje proizvoda putem prebrojavanja i korišćenje tablice množenja nego li za postupak izračunavanja zbira jednakih sabiraka i primenu aritmetičkih svojstava operacije množenja.

Pomoćne hipoteze

1. Izbor aritmetičkih postupaka učenika u rešavanju praktičnih problema zavisi od prethodne obuke učenika
2. Spontani i neplanirani postupci rešavanja problema učenika prvog razreda nisu zasnovane na konceptu sabiranja, već na konceptu prebrojavanja

3. Učenici se često opredeljuju za ranije dobro usvojene postupke izračunavanja nego li za primenu svojstava operacije množenja

4. Izbor postupaka za izračunavanje proizvoda brojeva determinisan je situacijom i prezentovanim materijalom, odnosno složenošću zadatka

U istraživanje je bilo uključeno 106 učenika jedne osnovne škole iz Beograda. Prema polu ispitanika u istraživanju je učestvovalo 57 dečaka ili 53,8 % i 49 devojčica ili 46,2 % ukupnog broja ispitanika.

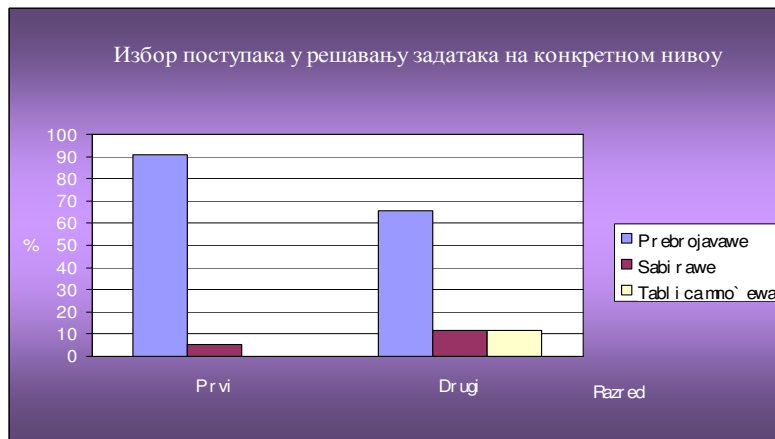
Učenicima su ponuđene tri grupe zadataka za rešavanje. Prva grupa obuhvatala je zadatke na konkretnom nivou, druga na ikoničkom i treća grupa zadataka na simboličkom nivou.

4. Analiza rezultata istraživanja

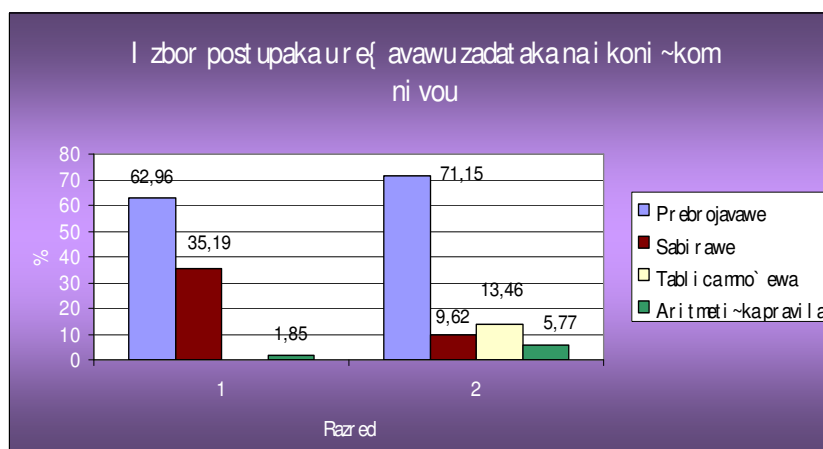
Rezultati istraživanja pokazuju da u svim slučajevima postoji značajna razlika u izboru postupaka kod učenika prvog i drugog razreda. To možemo razumeti kao uticaj nastave i formalne obuke na primenu određenih postupaka prilikom rešavanja zadataka. Kod učenika prvog razreda dominira postupak prebrojavanja i u daleko manjem broju slučajeva ritmičnog prebrojavanja, dakle po 2, 3, 4 ... elementa ili sabiranja. Tablica množenja razumljivo nije zastupljena u prvom razredu, obzirom da se učenici sa njom u okviru časova matematike nisu upoznali. Kod učenika drugog razreda pored dominantnog prebrojavanja u postupku računanja značajno mesto zauzima tablica množenja što je svakako posledica izučavanja teme množenja u drugom razredu. Zaključujemo da presudan značaj na oblikovanje teme množenje, razvijanja odgovarajućih mentalnih shema i usvajanje tablice množenja ima sistematski rad u nastavi matematike, te da se pojam množenja ne može spontano razviti kod učenika. Na osnovu prezentovanih rezultata možemo reći da *izbor aritmetičkih postupaka učenika u rešavanju*

zadataka zavisi od njihove prethodne obuke čime je potvrđena prva hipoteza našeg istraživanja.

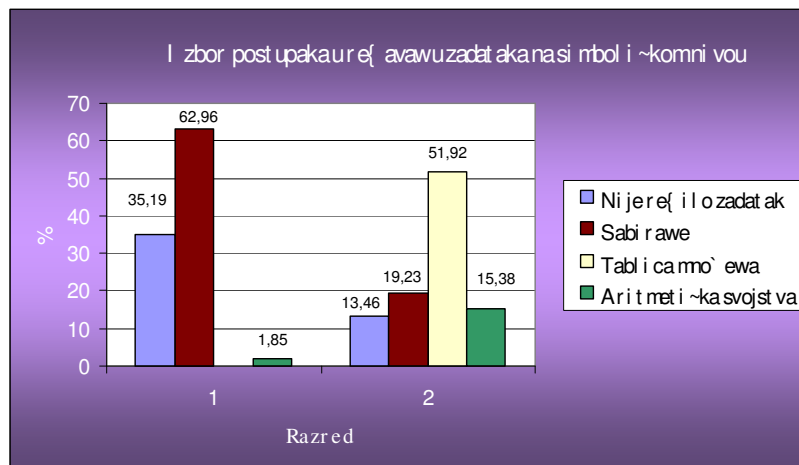
Analizirajući zastupljenost postupka prebrojavanja kod učenika prvog razreda u odnosu na druge postupke izračunavanja možemo videti da je prebrojavanje daleko češće zastupljeno. U prvom zadatku 94,4% učenika koristilo je prebrojavanje, u drugom zadatku 88,9%, a u trećem 37% učenika i samo 3,7% sabiranje. Podsećamo da treći zadatak nije rešilo čak 59,3% učenika što govori da učenici prvog razreda nemaju izgrađene multiplikativne sheme odnosno ikoničke predstave takvih situacija.



U četvrtom zadatku 92,6% učenika prvog razreda koristilo je prebrojavanje a samo 5,6% sabiranje, dok je u petom zadatku procenat učenika koji koriste prebrojavanje nešto niži i iznosi 55,6%. U šestom zadatku istim postupkom koristilo se 54,7% a u sedmom 18,5% učenika.



Sedmi zadatak učenici prvog razreda rešavali su koristeći se ritmičnim prebrojavanjem po dva elementa u 59,3% slučajeva što ne možemo u potpunosti smatrati kao primenu sabiranja. Osmi zadatak rešilo je 64,8% učenika uz pomoć očiglednih sredstava koristeći se sabiranjem bez formiranja izraza ili primene nekog od aritmetičkih pravila ove operacije. Deveti zadatak uz korišćenje konkretnog materijala rešilo je 53,7% učenika služeći prebrojavanjem po 4, 6 i 8 elementa..

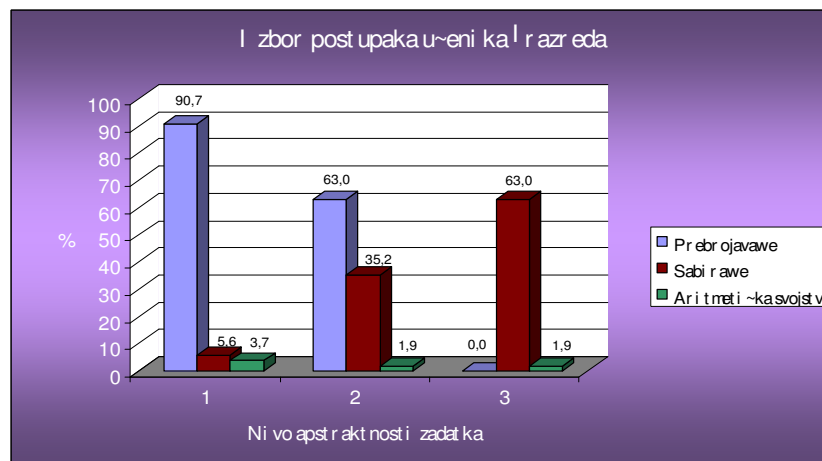


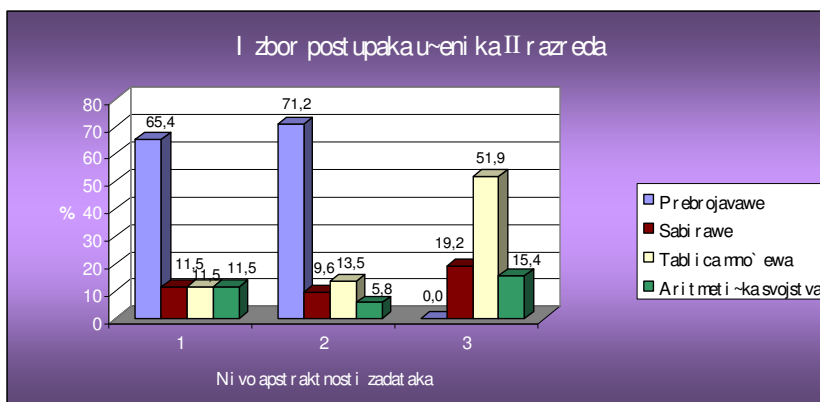
Na osnovu dobijenih rezultata zaključujemo da su **spontani postupci rešavanja problema učenika prvog razreda u pre zasnovani na konceptu prebrojavanja nego li na sabiranju** čime je i druga hipoteza našeg istraživanja potvrđena. Za nas je takođe značajan podatak i da se učenici u konkretnim zadacima u mnogo većem broju opredeljuju za postupak prebrojavanja nego li u zadacima koji su ikonički ili simbolički izraženi. To sa jedne strane može ukazivati i na činjenicu da kao i kod odraslih postoji "lenjost uma" te da smo skloni da kada postoji mogućnost koristimo postupke koji su kod nas duže razvijeni i u koje smo sigurniji. Sa druge strane ovu pojavu možemo tumačiti i sa aspekta da učenici nisu u potpunosti osposobljeni da znanja stečena u nastavi matematike prenesu u konkretne životne situacije.

Posmatrajući predstavljene rezultate možemo videti da se učenici drugog razreda u neznatnom broju slučajeva opredeljuju za korišćenje aritmetičkih

svojstava i kada im to situacije ili zadaci sugerišu. U drugom i petom zadatku se za primenu aritmetičkih pravila opredelilo 7,7% učenika a u šestom neznatni broj ili 1,9% učenika. U sedmom zadatku je 19,2% učenika koristilo izraze množenja zbira brojem ali ne u њиховом invarijantnom obliku. U ostalim zadacima učenici nisu primenjivali aritmetička svojstva množenja. Na osnovu rezultata možemo zaključiti da su se rešavajući zadatke **učenici drugog razreda radije opredeljivali za postupak prebrojavanja ili korišćenje tablice množenja nego li za sabiranje ili upotrebu aritmetičkih pravila** čime je treća hipoteza istraživanja potvrđena.

Uzimajući u obzir predstavljene rezultate zaključujemo da postoji značajna razlika u izboru aritmetičkih postupaka u odnosu na vrstu materijala i složenost zadataka kako kod ispitanika unutar jednog stratuma tako i među učenicima prvog i drugog razreda. U prvoj grupi zadataka prebrojavanje je zastupljeno kod 78,3 % ukupnog broja ispitanika, dok u drugoj grupi opada na 67% uz porast primene postupka sabiranja i tablice množenja. U trećoj grupi zadataka kod učenika drugog razreda prebrojavanje je zastupljeno u 13.5% slučajeva, sabiranje u 19.2%, primena nekog od aritmetičkih pravila u 15,4% i tablice množenja kod 51,9% ispitanika. Imajući u vidu analizirane rezultate zaključujemo *da je izbor postupaka za izračunavanje proizvoda brojeva determinisan situacijom i prezentovanim materijalom, odnosno složenošću zadatka* te da je četvrta hipoteza našeg istraživanja potvrđena.





Posmatrajući rezultate do kojih smo došli istraživanjem zaključujemo da je glavna hipoteza našeg istraživanja potvrđena i da ***se učenici prilikom rešavanja zadataka zasnovanim na strukturama množenja, radije opredeljuju za izračunavanje proizvoda putem prebrojavanja i korišćenje tablice množenja nego li za postupak izračunavanja zbira jednakih sabiraka i primenu aritmetičkih svojstava operacije množenja.***

5. Zaključna razmatranja

Sumirajući rezultate istraživanja možemo izvesti nekoliko bitnih zaključaka za početnu nastavu matematike odnosno izučavanje teme množenja u drugom razredu:

- Pojam množenja ne može se spontano razviti kod učenika već dobro planiranim i sistematskim radom u nastavi matematike.
- Izgradnju pojma množenja kod učenika drugog razreda treba bazirati na pažljivo odabranom ikoničkom okruženju odnosno shemama u kojima se jasno uočavaju disjunktne unije jednakobrojnih skupova pre nego li na konkretnim životnim situacijama.

- c) U nastavi matematike od prvog razreda treba insistirati na kretanju kroz sve nivoe apstrakcije i osposobljavati učenike za ikoničko predstavljanje konkretnih situacija kojima ćemo ih postepeno voditi ka simboličkom mišljenju.
- d) Prilikom izučavanja teme množenja učenicima omogućiti razumevanje veze sa operacijom sabiranja koju su izučavali u prethodnom razredu.
- e) Kreiranim zadacima insistirati na usvajanju aritmetičkih svojstava množenja kroz njihove invarijantne oblike uz veći broj primera zasnovanih na značenju.
- f) Drilovanje tablice množenja dovodi do mehaničkog pamćenja ali ne i do potpunog razumevanja operacije množenja. S toga je značajno tablicu množenja izučavati strukturno na sistematski način uz podršku slikovnog okruženja.
- g) Kroz dobro pripremljene zadatke učenicima omogućiti primenu stečenih znanja u svakodnevnim situacijama kao i sastavljanje odgovarajućih aritmetičkih izraza.

6. Литература

- Arnhajm., R. : *Umetnost i vizuelno opažanje*, Umetnička akademija u Beogradu, 1971
- Arnhajm, R. : *Vizuelno mišljenje* (jedinstvo slike i pojma), Univerzitet umetnosti, Beograd, 1985
- Bakovljević, M. : *Didaktika*, Naučna knjiga, Beograd
- Bandur, V., Potkonjak, N. : *Metodologija pedagogije*, Savez pedagoških društava, Beograd, 1999
- Vilotijević, M. : *Didaktika 1, 2, 3*, Naučna knjiga i Učiteljski fakultet, Beograd, 1997
- Vilotijević, M.: Odnos didaktike i metodike, *Metodička praksa* 3 , 1999, Beograd
- Dejić, M., Egerić, M. : *Metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet, Jagodina, 2003
- Dejić, M, : *The first machines for recording numbers and calculation fingers, tally and abacus, XI Congrees of SCG Mathematicians, Petrovac na moru, 28.09-3.10.2004*
- Devide, V. : *Matematika kroz kulture i epohe*, Školska knjiga, Zagreb, 1979
- Dobrić, N. : *Razvijanje početnih matematičkih pojmova*, Beograd,
- Žlebnik, L. : *Opšta povijest pedagogije*, Pedagoško-književni zbor, Zagreb, 1955
- Ivić, I. : *Aktivno učenje*, Institut za psihologiju, Beograd, 1997
- Ivić, I. : *Čovek kao animal simbolikum* , Nolit, Beograd, 1987
- Lampert, M.: *"Knonjing, doing, and teaching multiplication"* Institute for Research on Teaching, Michigan State University, 1998
- Marjanović, M.: *Metodika matematike 1*, Učiteljski fakultet, Beograd, 1996
- Marjanović, M.: *Metodika matematike 2*, Učiteljski fakultet, Beograd, 1996
- Marjanović, M.: *A broader njay through themas of elementary school mathematics*, III, The teaching of mathematics, 2002, Vol.III, 1 pp. 41-51

Marjanović, M.: *A broader njay through themas of elementary school mathematics*, IV, The teaching of mathematics, 2002, Vol.V, 1 pp. 47-55

Marjanović, M, Kaps M. : *Matematika 2*, Zavod za uxbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 2004

Marjanović, M., Latković, M., Nikodijević, B.: *Matematika za 2. razred*, Zavod za uxbenike i nastavna sredstva , Beograd, 1996

Nesher. P, : *"Multiplicative School Word Problems"*, Lanjrence Erlbaum Association, Prag, 1988

Nilssen V.: *"Mentoring the teaching of multiplication"*, European Journal of Teacher Education, 1998, 21(1), 29-46

Pijaže, Ž., Inhelder, B.: *Intelektualni razvoj deteta*, Zavod za uxbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996

Poljak, V. : *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb, 1985

Prvanović, S. : *Metodika savremenog matematičkog obrazovanja u osnovnoj školi*, Zavod za uxbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1970

Silke, R. : *Situated Multiplying in Primary School*, Seminar d. Mathem. und ihre Didaktik, Keln, 1999

Skemp, R.: *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, 1971

Schnjank, I., Gelfman E., Nardi E.: *Mathematical Thinking and Learning as Cognitive Processes*, The First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Osnabrueck - Haus Ohrbeck, Germany ,1998

Courant, R. and Robbins, H.: *What is Mathematics?*, Oxford Univ. Press, 1948

Zech, F. : *Grundkurs Mathematik didaktik -Theoretische und praktische Anleitungen fur das Lehren und Lernen von Mathematik*, Weinheim und Dasel, 1998

Freudenthal, H. : *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company/Dordecht-Holland, 1973

Hackevič, R.P. : Matematika, ACT, Moskva, 2000

Yeung, K., Leung H.: "New ideas teaching the Multiplication Table in Primary Mathematics Education, Hong Kong Institute of Education, 2000